

## Wann und wie wendet man FFT an?

Das Spektralanalyse-Paket WP02 enthüllt Signaleigenschaften, die im Zeitbereich nicht sichtbar sind. Mit der FFT (Fast Fourier Transform)-Option kann das Oszilloskop Frequenzbereichsanalysen durchführen. FFT wandelt einen Zeitbereichssignalzug in Frequenzbereichspektren ähnlich denen eines Spektralanalysators um, wobei FFT jedoch wichtige Unterschiede und Vorteile bietet.

### Warum FFT anwenden?

In eine große Gruppe von Signalen kann durch Betrachtung der Spektralrepräsentation bessere Einsicht gewonnen werden als durch Zeitbeschreibung. Signale, wie sie in der Frequenzantwort von Verstärkern, im Oszillatorphasenrauschen und in der mechanischen Vibrationsanalyse anzutreffen sind — um nur ein paar Anwendungen zu nennen — sind im Frequenzbereich einfacher zu betrachten

Wenn die Abtastung mit einer Rate erfolgt, die schnell genug ist, um den ursprünglichen Signalzug getreu zu approximieren (üblicherweise das Fünffache der höchsten Frequenzkomponente im Signal), dann beschreibt die resultierende diskrete Datenserie nur das Analogsignal.

Dies ist besonders nützlich bei der Betrachtung transienter Signale, da konventionelle Datensatznahme-Spektralanalysatoren, im Gegensatz zu FFT, diese Signale nicht analysieren können.

### Theorie der FFT

In der Spektralanalysetheorie wird angenommen, daß das umzuwandelnde Signal von unendlicher Dauer ist. Da kein physisches Signal diese Bedingung erfüllen kann, nimmt man, um Theorie und Praxis in Einklang zu bringen, an, daß das Signal aus einer unendlichen Serie von Repliken seiner selbst besteht. Diese Repliken werden durch ein Rechteckfenster (Anzeigegitter) multipliziert, das außerhalb des Beobachtungsgitters null ist.

- *Erläuterungen zu FFT-Begriffen: siehe das Glossar auf Seite C-19*
- *FFT-Funktionen anwenden: siehe Seite C-10*
- *FFT-Algorithmen: Seite C-15*

Die Abbildung C-1 zeigt Spektren eines abgetasteten dreieckigen Signalzugs. Diskontinuitäten an den Signalzugrändern erzeugen Verluste, deren Effekt am mittels Rechteckfenster berechneten Signalzug A deutlich sichtbar, im Von-Hann-Fenster (Signalzug B) jedoch weniger ausgeprägt ist (*Erläuterungen bzgl. Verlust und Fensterart siehe unten*). Histogramming (Signalzug C) verdeutlicht die Spanne der ersten Harmonischen.

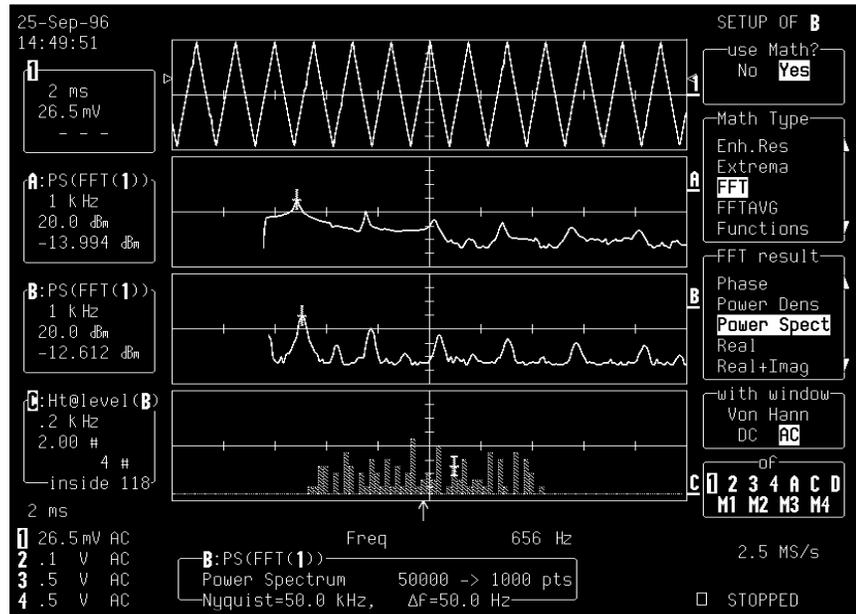


Abbildung C-1

Zerlegung des Signalzugs in der oben beschriebenen Weise ist gleichbedeutend mit Auflösung der Spektralenergie in eine unendliche Anzahl von Nebenkomponenten, die Vielfachen der Frequenzauflösung  $\Delta f$  (Abb. C-2) entsprechen. Das Beobachtungsfenster oder die Erfassungszeit  $T$  bestimmen die Frequenzauflösung der FFT ( $\Delta f=1/T$ ), während die Abtastperiode und die Aufzeichnungslänge die maximal zu erlangende Frequenzspanne definieren ( $f_{\text{Nyq}}=\Delta f \cdot N/2$ ).

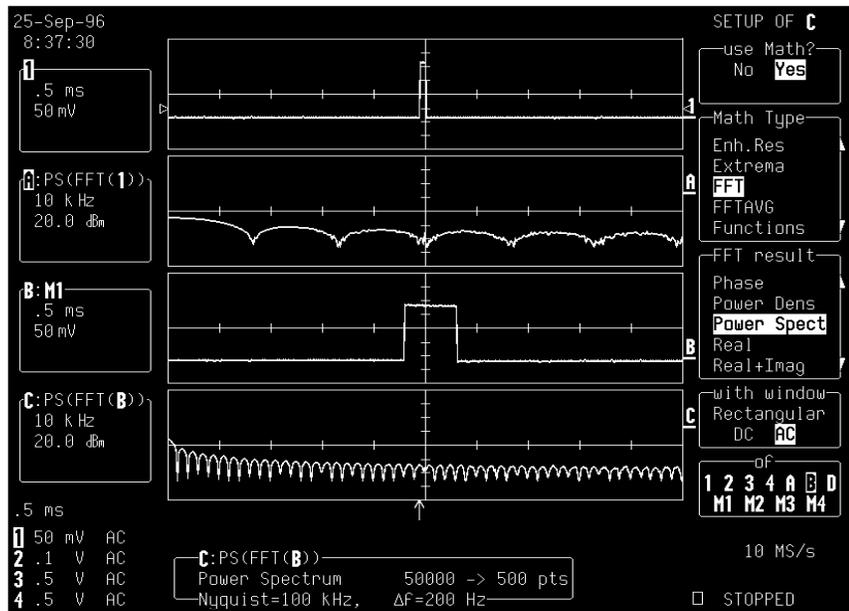
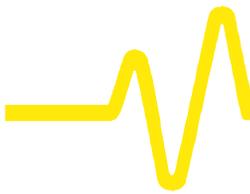


Abbildung C-2

Eine FFT-Analyse an einem N-Punkte-Zeitbereichsignal ist deshalb mit dem Durchgang des Signals durch ein Kammfilter vergleichbar, das aus einer Reihe von  $N/2$ -Filtern besteht, die alle dieselbe Form und Breite haben und über  $N/2$  diskrete Frequenzen zentriert sind. Jedes Filter sammelt die in die unmittelbare Nachbarschaft seiner Mittenfrequenz fallende Signalenergie, so daß man sagen kann, daß  $N/2$  "Frequenzkanäle" vorhanden sind. Die Entfernung zwischen den Mittenfrequenzen zweier benachbarter Kanäle (in Hz) ist stets:  $\Delta f$ .

**Leistungs(dichte)spektrum** Die für die Amplitudendarstellung benutzte Linearskala bewirkt häufig, daß niedrigere Amplitudenkomponenten durch größere Komponenten verdeckt werden. Neben den Funktionen zur Amplituden- und Phasendarstellung bietet die FFT-Option Leistungsdichte- (Power Dens) und Leistungsspektrumdichte- (Power Spect)-Funktionen, die aus dem in den Abbildungen ge-



zeigten "FFT result"-Menü wählbar sind. Letztere Funktionen eignen sich noch besser zur Spektren-Charakterisierung.

Das Leistungsspektrum ( $V^2$ ) ist das Quadrat des Amplitudenspektrums (0 dB m entspricht der Spannung, die gleichwertig ist mit 1 mW in 50  $\Omega$ .) Diese Darstellung ist gut geeignet für Signale, die isolierte Spitzen enthalten — z.B. periodische Signale.

Das Leistungsdichtespektrum ( $V^2/\text{Hz}$ ) ist das Leistungsspektrum, geteilt durch die äquivalente Bandbreite des Rauschens des verwendeten Filters in Hz mit FFT-Berechnung. Es ist bestgeeignet für die Charakterisierung von Breitbandsignalen wie Rauschen.

### Speicher für FFT

Das verfügbare Erfassungsspeichervolumen bestimmt den maximalen Bereich (Nyquist-Frequenz), über den Signalkomponenten beobachtbar sind. Betrachten wir das Problem der Festlegung der Länge des Beobachtungsfensters und der Größe des Erfassungspufferspeichers, wenn eine Nyquistrate von 500 MHz und eine Auflösung von 10 kHz erforderlich sind. Um eine Auflösung von 10 kHz zu erzielen, wird eine Erfassungszeit benötigt von mindestens:

$$T = 1/\Delta f = 1/10 \text{ kHz} = 100 \mu\text{s}.$$

Bei einem Digitaloszilloskop mit einem Speicher von 100 k ist die höchste analysierbare Frequenz:

$$\Delta f \times N/2 = 10 \text{ kHz} \times 100 \text{ k}/2 = 500 \text{ MHz}.$$

### Bei FFT zu vermeidende Fehler

Achten Sie auf korrekte Signalerfassung: Ungeeignete Signalzugpositionierung im Beobachtungsfenster erzeugt ein verzerrtes Spektrum. Die meisten Verzerrungen sind auf unzureichende Abtastung, Randdiskontinuitäten, auf ungeeignete Fensterwahl oder auf den "Lattenzauneffekt" zurückzuführen.

Da FFT wie eine Reihe von über Vielfachen der Frequenzauflösung zentrierten Bandpaßfiltern wirkt, fallen Komponenten, die keine exakten Vielfachen jener Frequenz sind, in zwei aufeinanderfolgende Filter. Dies führt zu einer Dämpfung der eigentlichen Amplitude dieser Komponenten.

### Lattenzauneffekt und Ausschnittsverlust

Der höchste Punkt im Leistungsspektrum kann um 3,92 dB niedriger sein, wenn die Eingangsfrequenz genau in der Mitte zwischen zwei diskreten Unterteilungsfrequenzen liegt. Die Variation der Höhe

im Spektrum wird als "Lattenzauneffekt" bezeichnet. Der dadurch verursachte Verlust wird Ausschnittsverlust ("scallop loss") genannt. LeCroy-Oszilloskope korrigieren den Scallop-Effekt automatisch und stellen sicher, daß die Amplitude der Spektrallinien ihren tatsächlichen Werten im Zeitbereich entspricht.

Enthält ein Signal eine Frequenzkomponente, die höher ist als die Nyquist-Frequenz, wird das Spektrum unterabgetastet (aliased), was bedeutet, daß die Frequenzen rückgefaltet und verfälscht werden. Es ist oft schwierig, unterabgetastete Frequenzen festzustellen, da die verfälschten Signale auf realen Harmonischen reiten können. Ein einfaches Prüfverfahren besteht darin, die Abtastrate zu ändern und zu überprüfen, ob die Frequenzverteilung sich ändert.

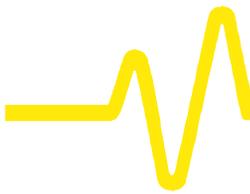
### Verlust (Leakage)

Bei FFT wird angenommen, daß das im Zeitgitter enthaltene Signal außerhalb des Beobachtungsfensters endlos wiederholt wird. Enthält deshalb das Signal an seinen Rändern Diskontinuitäten, erscheinen Pseudofrequenzen im Spektralbereich, die das reale Spektrum verzerren. Differieren Start- und Endphase des Signals, fällt die Signalfrequenz in zwei Frequenzzellen und verbreitert das Spektrum.

Dieser Effekt wird in Abbildung C-1 illustriert. Da das Display keine ganzzahlige Anzahl von Perioden enthält, zeigt das in Signalzug B dargestellte Spektrum keine scharfen Frequenzkomponenten. Dazwischenliegende Komponenten haben eine niedrigere und breitere Spitze. Die Verbreiterung der Basis, die in zahlreiche benachbarte Kanäle hineinreicht, wird als Verlust bezeichnet. Diesem kann abgeholfen werden, indem man sicherstellt, daß eine ganzzahlige Anzahl von Perioden im Anzeigegitter enthalten ist oder daß keine Diskontinuitäten an den Rändern erscheinen. Eine weitere Abhilfemöglichkeit bietet die Benutzung einer Fensterfunktion zum Glätten der Signalaränder.

### Wahl des Fensters

Die Wahl des Spektralfensters wird von den Signaleigenschaften diktiert. Bewertungsfunktionen steuern die Filterantwortform und beeinflussen sowohl die Bandbreite des Rauschens als auch die Pegel der Nebenkompenten. Idealerweise sollte die Hauptkomponente möglichst eng und flach sein, um alle Spektralkomponenten wirksam zu unterscheiden, wobei alle Nebenkompenten unendlich gedämpft werden sollten.



Die aus dem "with window"-Menü gewählte Fensterart definiert die Bandbreite und die Form des entsprechenden in der FFT-Verarbeitung zu benutzenden Filters.

Ebenso wie bei der Wahl einer speziellen Kameralinse zur Realisierung einer Photographie muß auch bei der Suche nach dem geeignetsten Fenster generell etwas experimentiert werden. Die folgenden allgemeinen Richtlinien sollten jedoch hilfreich sein (*siehe Seite C-12 bzgl. der Fensterarten*).

Rechteckfenster bieten die höchste Frequenzauflösung und werden deshalb normalerweise verwendet, um den Typ der im Signal vorhandenen Harmonischen abzuschätzen. Da das Rechteckfenster als  $\text{sinc}/x$ -Funktion im Spektralbereich abfällt, wird eine leichte Dämpfung bewirkt. Alternative Funktionen mit geringerer Dämpfung — Flattop- und Blackman-Harris-Fenster — bieten maximale Amplitude zu Lasten der Frequenzauflösung. Wobei Hamming- und Von-Hann-Fenster für übliche Verwendung mit kontinuierlichen Signalzügen gut geeignet sind.

**Dynamikbereich verbessern** Enhanced Resolution (*siehe Anhang B*) nutzt eine Tiefpaßfiltertechnik, die potentiell drei zusätzliche Bits (18 dBs) liefern kann, wenn das Signalrauschen gleichmäßig verteilt ist (weißes Rauschen). Tiefpaßfilterung sollte in Betracht gezogen werden, wenn hochfrequente Komponenten irrelevant sind. Ein bedeutender Vorteil dieser Technik besteht darin, daß sie sowohl für periodische als auch für transiente Signale geeignet ist. Der Anstieg des Rauschabstands ist durch die Grenzfrequenz des ERES-Tiefpaßfilters und die Rauschform bedingt (Frequenzverteilung).

LeCroy-Digitaloszilloskope benutzen FIR-Digitalfilter, sodaß eine konstante Phasenverschiebung beibehalten wird. Die Phaseninformation wird deshalb durch den Filtervorgang nicht verzerrt.

**Spektralleistungsmittelung** Eine noch bedeutendere Dynamikbereichverbesserung wird an periodischen Signalen erzielt. Außerdem kann der Bereich vergrößert werden, ohne Frequenzantwortverluste hinnehmen zu müssen. Der vorliegende LeCroy-Oszilloskop ist mit 32-Bit-Akkumulationspuffern ausgerüstet, um Überläufe zu verhindern.

Spektralleistungsmittelung ist dienlich, wenn das Signal zeitlich variiert und die mittlere Leistung des Signals geschätzt werden muß. Zu den typischen Anwendungen gehören Rauschen und pseudostatistisches Rauschen. Während bei Zeitmittelung Phaseninformation ignoriert wird, werden bei Spektralmittelung sowohl Amplituden- als auch Phaseninformation aufgezeichnet. Spektralmittelung ist somit die überlegene Schätzfunktion. Und die Verbesserung ist typischerweise proportional zur Quadratwurzel der Anzahl der Mittelungen. Bei der Mittelung von weißem Rauschen über 10 Datennahmen im Meßbereich wird z.B. eine typische Verbesserung von 20 dBs erzielt.

Spektralleistungsmittelung ist die ideale Technik, wenn die Frequenzantwort passiver Netzwerke wie z.B. Filter bestimmt werden soll. Die Abbildungen 3 und 4 zeigen die Transferfunktionen eines Tiefpaßfilters mit einer 3 dB-Grenze, 11 MHz erzielt durch Erregung des Filters mittels einer Quelle weißen Rauschens (*Abb. C-3*) und eines Sinussignalerzeugers (*Abb. C-4*). Beide Techniken ergeben im wesentlichen die gleichen Ergebnisse. Die Wahl des Verfahrens wird durch die Verfügbarkeit einer geeigneten Erzeugerquelle bestimmt. Bei Berechnung und Anzeige von Einzelzeitbereichsignalzugspektren sind Leistungsmittelungen über 50 000 Spektren durchführbar.

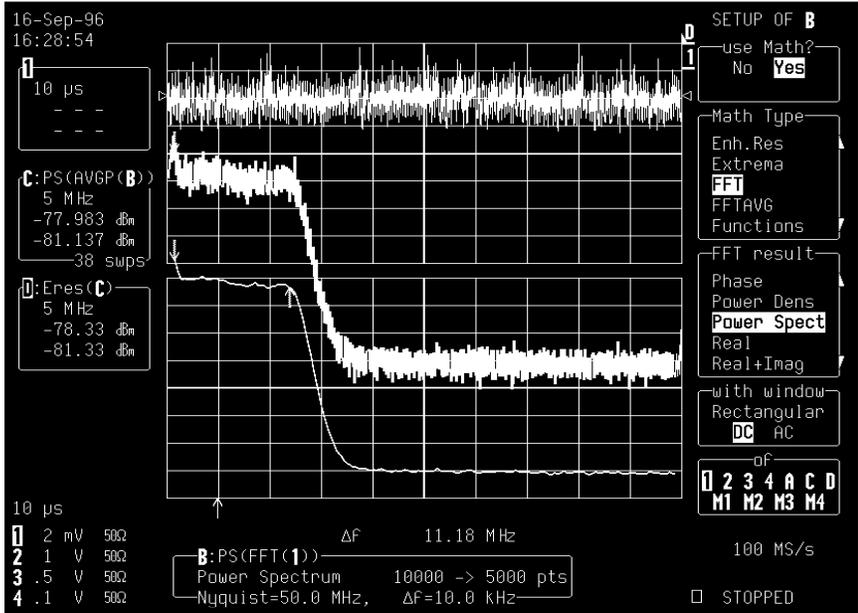


Abbildung C-3

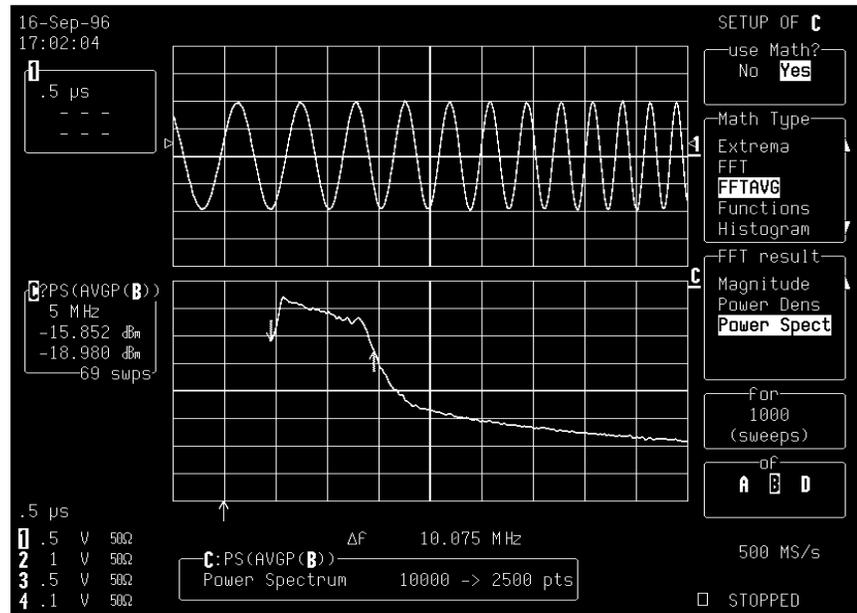


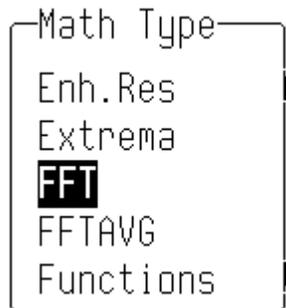
Abbildung C-4

## Fazit

Aufgrund ihrer Vielseitigkeit ist die FFT-Analyse zu einem gebräuchlichen Analysewerkzeug geworden. Bei ihrer Anwendung muß man jedoch sorgfältig vorgehen. In den meisten Fällen verändert unkorrektes Positionieren des Signals innerhalb des Anzeigegitters das Spektrum beträchtlich. Effekte wie Leakage und Unterabtastung, die das Spektrum verzerren, müssen berücksichtigt werden, wenn die FFT-Analyse zu sinnvollen Schlußfolgerungen führen soll.

Ein wirksamer Weg, diese Effekte zu reduzieren, besteht in der Maximierung der Erfassungsaufzeichnungslänge. Die Aufzeichnungslänge bedingt direkt die effektive Abtastrate des Oszilloskops und bestimmt folglich die Frequenzauflösung und Spanne, bei der Spektralanalyse durchführbar ist.

## FFT-Funktion anwenden



Wählen Sie "FFT" aus dem "Math Type"-Menü (*vollständige Beschreibung der Math- und Signalzugverarbeitungs-menüs siehe Kapitel 10*). Die Spektrenanzeige erfolgt auf einer linearen Frequenzachse, die von der Frequenz 0 bis zur Nyquist-Frequenz am rechten Rand des Signalzugs reicht. Die Frequenzskalenwerte (Hz/Teilung) haben die Folge 1–2–5.

Die Verarbeitungsgleichung wird zusammen mit den drei das FFT-Spektrum charakterisierenden Parametern am unteren Bildschirmrand angezeigt. Die Parameter sind folgende:

1. Transformationsgröße N (Anzahl der Datenpunkte)
2. Nyquist-Frequenz (= ½ Abtastrate) und
3. Frequenzinkrement,  $\Delta f$ , zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten des Spektrums.

Für diese Parameter gilt folgende Beziehung:

$$\text{Nyquist-Frequenz} = \Delta f * N/2.$$

Wobei  $\Delta f = 1/T$  gilt und T die Dauer der Eingangssignalaufzeichnung ist (10 \* Zeit/Teilung). Die Anzahl der Ausgangspunkte entspricht N/2.

**Hinweis zur maximalen Punktzahl: FFT-Spektren werden über dem gesamten Quellzeitbereichsignalzug berechnet. Dadurch wird die Anzahl der zur FFT-Verarbeitung benutzten Punkte begrenzt. Enthält der Eingangssignalzug mehr Punkte als das (in "for Math use max points") gewählte Maximum, wird die Punkteanzahl vor der FFT-Verarbeitung reduziert. Enthält der Signalzug jedoch weniger Punkte, werden alle verarbeitet.**



Das "FFT result"-Menü bietet folgende Wahlmöglichkeiten:

## Phase

Gemessen, bezogen auf einen Kosinus, dessen Maximum am linken Bildschirmrand liegt und an diesem Punkt  $0^\circ$  beträgt. Ein positiver Sinus, der am linken Bildschirmrand beginnt, hat eine Phase von  $-90^\circ$  (Anzeige in Grad).

## Power Density (Leistungsdichte)

Die auf die Bandbreite normierte Signalleistung des äquivalenten Filters, das mit der FFT-Berechnung verbunden ist. Die Leistungsdichte eignet sich zur Charakterisierung von Breitbandrauschen. (Sie wird auf einer in dBm kalibrierten logarithmischen vertikalen Skala angezeigt.)

## Power Spectrum (Leistungsspektrum)

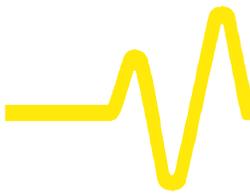
Die Signalleistung (oder Amplitude), die auf einer logarithmischen vertikalen Skala dargestellt wird. Null dBm entspricht einer Spannung (Sinus 0,316 V Spitze), die 1mW in  $50 \Omega$  äquivalent ist. Das Leistungsspektrum ist geeignet zur Charakterisierung von Spektren, die einzelne Spitzen enthalten. (dBm.)

## Magnitude (Amplitude)

Die Signalamplitude, dargestellt auf einer linearen Skala (gleiche Einheit wie das Eingangssignal).

## Real, Real + Imaginary, Imaginary

Stellen das komplexe Ergebnis der FFT-Verarbeitung dar (gleiche Einheiten wie das Eingangssignal).



**Windows**

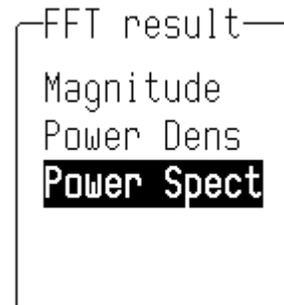
Die mittels des "with window"-Menüs wählbare Fensterart definiert die Bandbreite und Form des in der FFT-Verarbeitung zu benutzenden Filters (*Parameter des Filters siehe Tabelle auf Seite C-19*). Wird "AC" aus demselben Menü gewählt, wird die DC-Komponente des Eingangssignals vor der FFT-Verarbeitung auf Null gesetzt. Dies verbessert die Amplitudenauflösung, insbesondere wenn das Eingangssignal eine breite DC-Komponente hat.

Fensterart	Anwendungen und Grenzen
<b>Rechteckfenster</b>	Normalerweise angewendet, wenn das Signal transient ist — und im Zeitbereichsfenster vollständig enthalten ist — oder bekanntermaßen eine Grundfrequenzkomponente hat, die ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz des Fensters ist. Signale, die nicht zu dieser Klasse gehören, zeigen unterschiedliche Ausschnitts- und spektrale Verluste, die durch Verwendung eines der anderen Fenster korrigiert werden können.
<b>Hanning (Von Hann)</b>	Reduziert den spektralen Verlust und verbessert die Amplitudengenauigkeit. Die Frequenzauflösung wird allerdings vermindert.
<b>Hamming</b>	Reduziert den spektralen Verlust und verbessert die Amplitudengenauigkeit. Die Frequenzauflösung wird allerdings vermindert.
<b>Flat Top</b>	Liefert eine hervorragende Amplitudengenauigkeit mit mäßiger spektraler Verlustreduzierung auf Kosten der Frequenzauflösung.
<b>Blackman-Harris</b>	Reduziert den spektralen Verlust auf ein Minimum, jedoch mit Abstrichen bei der Frequenzauflösung.

**FFT Power Average**



Eine Funktion kann als die Leistungsmittelung der durch eine andere Funktion berechneten FFT-Spektren definiert werden. Wählen Sie "FFTAVG" aus dem "Math Type"-Menü und "Power Spect" aus dem "FFT Result"-Menü.



## Verarbeit.-Funktionen

Andere Signalzugverarbeitungsfunktionen wie z.B. Mittelung und Arithmetik können auf Signalzüge vor einer FFT-Verarbeitung angewendet werden. Steht ein stabiler Trigger zur Verfügung, so kann eine Zeitbereichsmittelung vor der FFT durchgeführt werden. Dadurch wird weißes Rauschen im Signal reduziert.

### *Hinweise:*

- **Zur Vergrößerung des FFT-Frequenzbereichs (Nyquist-Frequenz) muß die effektive Abtastfrequenz durch Erhöhung der maximalen Anzahl der Punkte oder durch Verwendung einer kleineren Zeitbasis erhöht werden.**
- **Zur Erhöhung der FFT-Frequenzauflösung muß die Länge des Signalzugdatensatzes im Zeitbereich mittels Verwendung einer größeren Zeitbasis erhöht werden.**

## Memory Status

Wird FFT angewendet, zeigt das Feld unter dem Gitter Parameter des Signalzugdeskriptors an (Anzahl der Punkte, horizontale und vertikale Skalierungsfaktoren und Einheiten etc.).

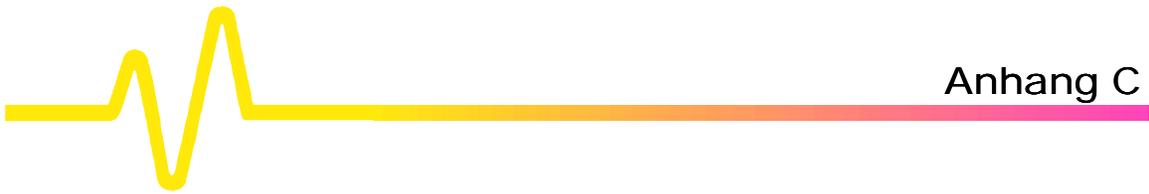
```
C:PS(AVGP(B))
Power Spectrum      10000 -> 2500 pts
```

## Cursorverwend. bei FFT

Zur Ablesung der Amplitude und Frequenz eines Datenpunktes kann der absolute Zeitcursor durch Bewegen über den rechten Rand eines Datensatzes im Zeitbereich hinaus in den Frequenzbereich gefahren werden.

Die relativen Zeitcursor können ebenso in den Frequenzbereich bewegt werden, um den Frequenzunterschied und den Amplitudenunterschied zwischen zwei Punkten auf jedem Signalzug im Frequenzbereich anzuzeigen.

Der absolute Spannungscursor liest den absoluten Meßwert eines Punktes in einem Spektrum in den gegebenen Einheiten ab, und die relativen Spannungscursor liefern die Differenz zwischen zwei Werten auf jedem Signalzug.



**Fehlermeldungen**

Nachfolgend eine Tabelle mit FFT in Zusammenhang stehender Fehlermeldungen, die am oberen Bildschirmrand erscheinen.

<b>Fehlermeldungen</b>	
<b>Meldung</b>	<b>Bedeutung</b>
<b>“Incompatible input record type”</b>	Die FFT-Leistungsmittelung benötigt als Quellsignal einen Datensatz auf den die FFT bereits angewendet worden ist.
<b>“Horizontal units don’t match”</b>	Die FFT eines Signals im Frequenzbereich ist nicht durchführbar.
<b>“FFT source data zero filled”</b>	Treten im Quellsignal ungültige Datenpunkte auf (am Anfang oder Ende eines Datensatzes), werden sie durch Nullen vor der FFT- Verarbeitung ersetzt.
<b>“FFT source data over/underflow”</b>	Die Amplitude des Quellsignals ist entweder bei der Erfassung (zu hohe Verstärkung oder ungeeigneter Offset) oder bei der voraus-gehenden Verarbeitung abgeschnitten worden. Die sich ergebende schnelle Fouriertransformierte enthält harmonische Komponenten, die im ursprünglichen Signal nicht vorhanden waren. Die die Erfassung oder Verarbeitung definierenden Einstellungen sollten geändert werden, um die ein Über- oder Unterschreiten des Meßbereichs verursachenden Bedingungen zu beseitigen.
<b>“Circular computation”</b>	Die Definition einer Funktion führt zum Zirkelschluß (d.h. Funktions-wert und Variable sind indirekt über eine andere Funktion oder Dehnung identisch). Eine der Definitionen sollte geändert werden.

## FFT-Algorithmen

**Eine Zusammenfassung der Algorithmen, die das Oszilloskop bei der FFT-Berechnung verwendet, wird nachfolgend in Form von sieben Schritten gegeben:**

1. Ist die maximale Anzahl der Punkte kleiner als die Anzahl der Ausgangspunkte, werden die zugrundeliegenden Signaldaten vor Ausführung der FFT dezimiert. Die dezimierten Datenpunkte decken die gesamte Länge des Ausgangssignals ab. Das daraus resultierende Abtastintervall und die tatsächliche Transformationsgröße, die ausgewählt wurde, liefern die Frequenzskalierungsfaktoren in der Ziffernfolge 1, 2, 5.
2. Die Daten werden mit der gewählten Fensterfunktion multipliziert.
3. Die FFT wird mit Hilfe einer schnellen Durchführung der DFT (Diskrete Fourier Transformation) berechnet:

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} x_k \times W^{nk},$$

wobei:  $x_k$  ein komplexer Ausdruck ist, dessen Realteil das modifizierte Ausgangssignal im Zeitbereich ist und dessen Imaginärteil Null ist;  $X_n$  der sich ergebende komplexe Signalzug im Frequenzbereich ist;  $W = e^{-2\pi j/N}$  und  $N$  die Anzahl der Punkte in  $x_k$  und  $X_n$  ist.

Der verallgemeinerte FFT-Algorithmus, der hier durchgeführt wird, wird auf  $N$ -Punkte angewendet, die *nicht* eine duale Basis haben müssen.

4. Der sich ergebende komplexe Vektor  $X_n$  wird durch die kohärente Verstärkung der Fensterfunktionen dividiert, um den durch die Anwendung der Fensterfunktion verursachten Verlust der Signalenergie zu kompensieren. Die Kompensation liefert genaue Amplitudenwerte für einzelne spektrale Spitzen.
5. Der Realteil von  $X_n$  ist symmetrisch bezüglich der Nyquist-Frequenz, d.h.:

$$R_n = R_{N-n},$$



während der Imaginärteil asymmetrisch ist, d.h.:

$$I_n = -I_{N-n}$$

Die Energie des Signals bei einer Frequenz  $n$  ist gleichmäßig zwischen der ersten und zweiten Hälfte des Spektrums aufgeteilt; die Energie bei einer Frequenz von Null ist komplett im Null-Term enthalten.

Die erste Hälfte des Spektrums (Re, Im) von 0 bis zur Nyquist-Frequenz wird zur weiteren Verarbeitung verwendet und die Amplitude verdoppelt:

$$\begin{aligned} R'_n &= 2 R_n & 0 & n < N/2 \\ I'_n &= 2 I_n & 0 & n < N/2. \end{aligned}$$

6. Der Signalzug wird entsprechend der gewählten Ausgabeform des Spektrums berechnet.

Bei Auswahl von "Real", "Imaginary" oder "Real + Imaginary" sind keine weiteren Berechnungen erforderlich. Der entsprechende Teil des komplexen Ergebnisses wird als Ausgabegröße angegeben ( $R'_n$  oder  $I'_n$  oder  $R'_n + jI'_n$ , wie oben definiert).

Bei Auswahl der Amplitude ("Magnitude") wird die Amplitude des komplexen Vektors wie folgt berechnet:

$$M_n = \sqrt{R_n'^2 + I_n'^2}$$

Die Schritte 1 bis 6 führen zu folgendem Ergebnis:

Eine AC-Sinuskurve mit einer Amplitude von 1,0 V und einer ganzzahligen Anzahl von Perioden  $N_p$  im Zeitfenster, transformiert mit dem Rechteckfenster, ergibt eine Hauptspitze von 1,0 V Amplitude im Spektrum bei der Frequenz  $N_p \times \Delta f$ . Eine DC-Komponente von 1,0 V jedoch, transformiert mit dem Rechteckfenster, ergibt eine Spitze von 2,0 V Amplitude bei 0 Hz.

Die Kurven für die anderen zur Verfügung stehenden spektralen Größen werden wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \text{Phase: Winkel} &= \arctan(I_n'/R_n') & M_n &> M_{min} \\ \text{Winkel} &= 0 & M_n &\leq M_{min} \end{aligned}$$

Wobei  $M_{min}$  die kleinste Amplitude ist, die bei ungefähr 0,001 des Meßbereichs bei jeder beliebigen Verstärkungseinstellung festgelegt ist, unterhalb der der Winkel nicht exakt definiert ist.

dBm-Leistungsspektrum:

$$dBm PS = 10 \times \log_{10} \left( \frac{M_n^2}{M_{ref}^2} \right) = 20 \times \log_{10} \left( \frac{M_n}{M_{ref}} \right)$$

wobei  $M_{ref} = 0,316$  V (d.h. 0 dBm wird definiert als eine Sinuskurve mit einer Spitze von 0,316 V oder 0,224 V RMS, entsprechend 1mW in 50  $\Omega$ ).

Das "dBm Power Spectrum" ist das gleiche wie "dBm Magnitude", wie aus der o.g. Formel hervorgeht.

dBm-Leistungsdichte:

$$dBm PD = dBm PS - 10 \times \log_{10} (ENBW \times \Delta f)$$

wobei  $ENBW$  die äquivalente Rauschbandbreite des dem ausgewählten Fenster entsprechenden Filters und  $\Delta f$  die gegenwärtige Frequenzauflösung ist (Kanalbreite).

- Die FFT-Leistungsmittelung verwendet für jedes Spektrum die komplexen Daten des Frequenzbereichs  $R'_n$  und  $I'_n$ , die in Schritt 5 erzeugt wurden, berechnet das Quadrat der Amplitude:

$$M_n^2 = R_n'^2 + I_n'^2,$$

summiert  $M_n^2$  auf und zählt die akkumulierten Spektren. Das Ergebnis wird normiert auf die Anzahl der Spektren und in den gewählten Ergebnistyp unter Verwendung der gleichen Formel wie für die Fouriertransformation umgeformt.



# Glossar

Dieses Glossar definiert im Zusammenhang mit der FFT-Spektralanalyse häufig verwendete Termini.

**Aliasing  
(Unterabtastung)**

Enthält das Eingangssignal eines Abtastungserfassungssystems Komponenten, deren Frequenz höher ist als die Nyquist-Frequenz (Hälfte der Abtastfrequenz), werden weniger als zwei Abtastungen pro Signalperiode vorgenommen. Dies hat zur Folge, daß der Beitrag dieser Komponenten zum abgetasteten Signalzug nicht von dem der Komponenten unterhalb der Nyquist-Frequenz unterschieden werden kann. Diesen Vorgang nennt man Unterabtastung.

Die Zeitbasis und Transformationsgröße sind so zu wählen, daß die sich daraus ergebende Nyquist-Frequenz höher ist, als die höchste bedeutsame Komponente im Datensatz des Zeitbereichs.

**Coherent Gain  
(kohär. Verstärkung)**

Die normierte kohärente Verstärkung eines jeder Fensterfunktion entsprechenden Filters ist 1,0 (0 dB) für ein Rechteckfenster und weniger als 1,0 für die anderen Fenster. Sie definiert den durch die Multiplikation mit der Fensterfunktion verursachten Signalenergieverlust. Im Oszilloskop wird dieser Verlust kompensiert. Die Tabelle unten führt die Werte für die vorhandenen Fensterfunktionen auf.

Fensterparameter im Frequenzbereich				
Fensterart	Größte Nebenkomponekte (dB)	Ausschnittsverlust (dB)	ENBW (Kanäle)	Kohärente Verstärkung (dB)
Rechteck	-13	3.92	1.0	0.0
von Hann	-32	1.42	1.5	-6.02
Hamming	-43	1.78	1.37	-5.35
Flat-Top	-44	0.01	2.96	-11.05
Blackman-Harris	-67	1.13	1.71	-7.53

**ENBW**

Für ein jedem Frequenzkanal zugeordnetes Filter ist die ENBW (Equivalent Noise BandWidth) die Bandbreite eines äquivalenten Rechteckfilters (mit gleicher Verstärkung bei der Schwerpunktfrequenz), das die gleiche Leistung von einem Signal mit weißem Rauschen aufnimmt. In der folgenden Tabelle wird die äquivalente Bandbreite des Rauschens für jede vorhandene Fensterfunktion aufgeführt und in Frequenzkanälen angegeben.

**Filter**

Die Berechnung einer N-Punkte umfassenden FFT ist gleichbedeutend mit dem Durchgang eines Eingangssignals im Zeitbereich durch N/2 Filter und dem Auftragen der Ergebnisse in Abhängigkeit der Frequenz. Der Abstand der Filter beträgt  $\Delta f = 1/T$ , während die Bandbreite von der verwendeten Fensterfunktion abhängt (siehe Frequenzkanäle).

**Frequenzkanäle**

Der FFT-Algorithmus wird auf ein über N Punkte definiertes diskretes Eingangssignal angewendet und berechnet N komplexe Fourierkoeffizienten, die als harmonische Komponenten des Eingangssignals interpretiert werden.

Bei einem realen Eingangssignal (Imaginärteil gleich 0) gibt es nur N/2 unabhängige harmonische Komponenten.

Die FFT entspricht der Analyse des Eingangssignals mit Hilfe einer Reihe von N/2 Filtern, die alle dieselbe Form und Breite haben und über N/2 diskrete Frequenzen zentriert sind. Jedes Filter sammelt die in die unmittelbare Nachbarschaft seiner Mittenfrequenz fallende Signalenergie, so daß man sagen kann, daß N/2 "Frequenzkanäle" vorhanden sind.

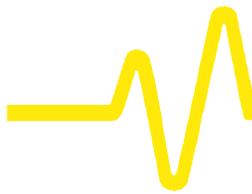
Die Entfernung zwischen den Mittenfrequenzen zweier benachbarter Kanäle (in Hz) ist stets:

$$\Delta f = 1/T,$$

wobei T die Dauer des Datensatzes im Zeitbereich in Sekunden ist.

Die Durchlaßbreite für die Hauptkomponente der Fouriertransformierten des über jeden Frequenzkanal zentrierten Filters hängt von der verwendeten Fensterfunktion ab. Beim Rechteckfenster beträgt die nominelle Breite 1,0; das entspricht genau einem Frequenzkanal. Andere Fenster haben andere Durchlaßcharakteristika (*siehe Tabelle*).

<b>Frequenzbereich</b>	Der berechnete und angezeigte Frequenzbereich reicht von 0 Hz am linken Bildschirmrand bis zur Nyquistfrequenz am rechten Rand der Kurve.
<b>Frequenzauflösung</b>	<p>Verallgemeinert betrachtet ist die Frequenzauflösung gleich der Kanalbreite <math>\Delta f</math>, d.h., falls sich die Frequenz des Eingangssignals um <math>\Delta f</math> ändert, wird die zugehörige Spektrumspitze um <math>\Delta f</math> verschoben. Bei kleineren Frequenzänderungen ändert sich lediglich die Form der Spitze.</p> <p>Die effektive Frequenzauflösung (d.h. die Fähigkeit, zwei Signale mit nahe beieinanderliegenden Frequenzen aufzulösen) wird jedoch durch die Verwendung der Fensterfunktionen weiter begrenzt. Die äquivalente Bandbreite des Rauschens (ENBW) aller Fenster, mit Ausnahme des Rechteckfensters, ist größer als <math>\Delta f</math>, d.h. größer als die des Kanals. <i>In der Tabelle auf Seite C-17 die äquivalenten Bandbreiten des Rauschens (ENBW) für die zur Verfügung stehenden Fenster aufgeführt.</i></p>
<b>Leakage (Verlust)</b>	<p>Im Leistungsspektrum einer Sinuskurve mit einer ganzen Anzahl von Perioden im (Rechteck)-Zeitfenster (d.h. die Ausgangsfrequenz ist gleich einer der Kanalfrequenzen) enthält das Spektrum eine scharfe Komponente, deren Wert genau der Amplitude des Quellsignals entspricht. Bei dazwischenliegenden Eingangsfrequenzen hat diese spektrale Komponente eine niedrigere und verbreiterte Spitze.</p> <p>Die Verbreiterung der Basis der Füllhöhen, die in zahlreiche benachbarte Kanäle hineinreicht, wird als Verlust ("leakage") bezeichnet. Er ist zurückzuführen auf relativ hohe Nebenkomponten des Filters, das jedem Frequenzkanal zugeordnet ist.</p> <p>Die Nebenkomponten des Filters und der entsprechende Verlust können durch Anwendung einer der zur Verfügung stehenden Fensterfunktionen reduziert werden. Die größtmögliche Reduzierung wird mit dem Blackman-Harris- und dem Flat-Top-Fenster erreicht. Diese Reduzierung wird jedoch durch eine Verbreiterung der Hauptkomponente des Filters (d.h. verminderte Frequenzauflösung) erkauft.</p>
<b>Number of Points</b>	Die FFT wird über eine Anzahl von Punkten ("Transform Size") berechnet, deren obere Grenze durch die Anzahl der Ausgangspunkte und die im Menü ausgewählte maximale Anzahl der Punkte ("maximum number of points") bestimmt wird. Die FFT erzeugt Spektren mit $N/2$ berechneten Werten.

**Nyquist-Frequenz**

Die Nyquist-Frequenz ist die effektive Abtastfrequenz geteilt durch 2 (nach der Dezimierung), d.h.  $\Delta f \times N/2$ .

**Picket Fence Effect (Lattenzauneffekt)**

Verfügt ein sinusförmiges Signal über eine ganze Anzahl von Perioden innerhalb des Datensatzes im Zeitbereich, hat das sich unter Verwendung eines Rechteckfensters ergebende Leistungsspektrum eine scharfe Spitze, die genau der Frequenz und Amplitude des sinusförmigen Signals entspricht. Andernfalls ist die sich unter Verwendung eines Rechteckfensters ergebende Spektrumspitze niedriger und breiter.

Der höchste Punkt im Leistungsspektrum kann um 3,92 dB (1,57 mal) niedriger sein, wenn die Eingangsfrequenz genau in der Mitte zwischen zwei diskreten Unterteilungsfrequenzen liegt. Die Variation der Höhe im Spektrum wird als "Lattenzauneffekt" bezeichnet. Der dadurch verursachte Verlust wird Ausschnittsverlust ("scallop loss") genannt.

Dieser Verlust wird durch alle Fensterfunktionen zu einem gewissen Grade ausgeglichen; die beste Korrektur wird mit dem Flat-Top-Fenster erreicht.

**Power Spectrum**

Das Leistungsspektrum ( $V^2$ ) ist das Quadrat des Amplitudenspektrums.

Das Leistungsspektrum wird auf der dBm-Skala angezeigt, wobei für 0 dBm die Gleichung:

$$V_{\text{ref}}^2 = (0.316 V_{\text{peak}})^2$$

gilt, wobei  $V_{\text{ref}}$  der Spitzenwert einer Sinusspannung ist, die gleichwertig ist mit 1 mW in 50  $\Omega$ .

**Power Dens. Spectrum**

Das Leistungsdichtespektrum ( $V^2/\text{Hz}$ ) ist das Leistungsspektrum geteilt durch die äquivalente Bandbreite des Rauschens des verwendeten Filters in Hz. Das Leistungsdichtespektrum wird auf der dBm-Skala angezeigt, wobei 0 dBm ( $V_{\text{ref}}^2/\text{Hz}$ ) entspricht.

**Sampling Frequency (Abtastfrequenz)**

Die Datensätze im Zeitbereich werden mit Abtastfrequenzen erfaßt, die von der gewählten Zeitbasis abhängig sind. Vor Berechnung der FFT können die Datensätze im Zeitbereich dezimiert werden. Unterschreitet die gewählte maximale Anzahl der Punkte die Anzahl der zugrundeliegenden Punkte, wird die effektive Abtastfrequenz reduziert. Die effektive Abtastfrequenz ist gleich dem Doppelten der Nyquist-Frequenz.

## Scallop Loss

Dabei handelt es sich um einen mit dem Lattenzauneffekt zusammenhängenden Verlust.

## Window Functions (Fensterfunktionen)

Alle zur Verfügung stehenden Fensterfunktionen gehören zur Familie der Kosinussummen mit einem bis drei Kosinustermen ungleich Null:

$$W_k = \sum_{m=0}^{m=M-1} a_m \cos \left( \frac{2 p k}{N} m \right) \quad 0 \leq k < N$$

Hierbei sind:  $M = 3$  die maximale Anzahl der Terme,  $a_m$  die Koeffizienten der Terme,  $N$  die Anzahl der Punkte des dezimierten Ausgangssignals und  $k$  der Zeitindex.

In der folgenden Tabelle werden die Koeffizienten  $a_m$  aufgeführt. Die im Zeitbereich dargestellten Fensterfunktionen sind symmetrisch zum Punkt  $k = N/2$ .

Koeffizienten der Fensterfunktionen			
Fensterart	a0	a1	a2
Rechteck	1.0	0.0	0.0
von Hann	0.5	-0.5	0.0
Hamming	0.54	-0.46	0.0
Flat-Top	0.281	-0.521	0.198
Blackman-Harris	0.423	-0.497	0.079

## Literaturhinweise

**Bergland, G.D.**, *A Guided Tour of the Fast Fourier Transform*, IEEE Spectrum, Juli 1969, S. 41–52.

Eine allgemeine Einführung in Theorie und Anwendung der schnellen Fourier-Transformation.

**Brigham, E.O.**, *The Fast Fourier Transform*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.

Theorie, Anwendungen und Implementierung der schnellen Fourier-Transformation. Beinhaltet eine Besprechung von FFT-Algorithmen in Fällen, in denen  $N$  keine Zweierpotenz ist.

**Harris, F.J.**, *On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform*, Proceedings of the IEEE, Band 66, Nr. 1, Januar 1978, S. 51–83.

Klassische Abhandlung über Fensterfunktionen und ihre Güteziffern mit vielen Fenster-Beispielen.

**Ramirez, R.W.**, *The FFT Fundamentals and Concepts*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1985.

Praxisorientiert, viele Anwendungsbeispiele.